ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES

STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE

1984

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

OPTION PHYSIQUE-MATHÉMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

N.B. : Ce sujet comporte 4 pages de texte.

I

On note $M_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. A toute matrice A de cet ensemble on fait correspondre l'endomorphisme Φ_A de cet espace :

$$\Phi_A : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$$

$$M \longmapsto AM - MA$$

Les vecteurs de $\mathbb{C}^n$ sont représentés dans la base canonique par des matrices-colonnes

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

1. Soit X un vecteur de $\mathbb{C}^n$ qui est vecteur propre de A, et d'autre part soit Y un vecteur propre de la transposée ${}^tA$ de cette matrice. Montrer que la matrice $M = X.{}^tY$ est un vecteur propre de Φ_A dans $M_n(\mathbb{C})$.

2. Démontrer que si A est diagonalisable, les vecteurs propres de Φ_A du type précédent engendrent $M_n(\mathbb{C})$. (On pourra remarquer que si $e_1,\ldots,e_n$ désignent les vecteurs colonnes de la base canonique de $\mathbb{C}^n$, les matrices $e_i.{}^te_j$, $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n)$, sont les éléments de la base canonique de $M_n(\mathbb{C})$.

   Que peut-on en déduire pour l'endomorphisme Φ_A ?

   Donner les valeurs propres de Φ_A en fonction de celles de A.

3. On suppose toujours A diagonalisable. Soit λ un complexe et B une matrice arbitraire de $M_n(\mathbb{C})$. Formuler une condition nécessaire et suffisante portant sur λ et A, pour que l'équation en M :

   $$M \in M_n(\mathbb{C}) \quad : \quad (A - \lambda I)M - MA = B$$

   admette une solution et une seule. (I est la matrice unité).

4. On considère le cas $n = 2$ et la matrice

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Montrer que Φ_A est diagonalisable et donner une base de $M_2(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de Φ_A.

   b) Discuter et résoudre l'équation en M :

   $$(A - mI)M - MA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$$

   où a, b sont deux complexes et m un entier positif donnés.

II

Dans cette partie la matrice A(x) est une matrice carrée donnée d'ordre 2 fonction de la variable réelle x, s'écrivant

$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k A_k$, les A_k étant des matrices (2,2) à coefficients complexes constants.

.../...

On se propose de résoudre le système différentiel

$$\textcircled{S} \qquad \begin{pmatrix} xy'_1(x) \\ xy'_2(x) \end{pmatrix} = A(x) \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

$y_1(x)$ et $y_2(x)$ étant deux fonctions complexes de la variable réelle x.

1. P(x) désigne une matrice carrée d'ordre 2 $\begin{bmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_3(x) & p_4(x) \end{bmatrix}$

inversible quel que soit x et dont les coefficients sont des fonctions complexes de la variable réelle x supposées continûment dérivables sur tout $\mathbb{R}$.

On pose $\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} = P(x) \begin{bmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{bmatrix}$

Quelle relation R doit lier A(x), A_0, P(x), $P'(x) = \begin{bmatrix} p'_1(x) & p'_2(x) \\ p'_3(x) & p'_4(x) \end{bmatrix}$

pour que $\textcircled{S}$ soit équivalent au système $\textcircled{\Sigma}$: $\begin{bmatrix} xz'_1(x) \\ xz'_2(x) \end{bmatrix} = A_0 \begin{bmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{bmatrix}$?

2. On souhaite déterminer les fonctions $p_i(x)$, (i = 1, 2, 3, 4), sous forme de séries entières de la variable x.
On pose :

$$p_i(x) = \sum_{k \geq 0} p_{ik} x^k \qquad \text{les } p_{ik} \text{ étant des constantes complexes.}$$

On note

$$P_k = \begin{bmatrix} p_{1k} & p_{2k} \\ p_{3k} & p_{4k} \end{bmatrix}$$

Montrer que la relation R est satisfaite si et seulement si toutes les relations R_0, R_1 et R_k $(k \geq 2)$ le sont :

$$\begin{cases} R_0 : A_0 P_0 - P_0 A_0 = 0 \\ R_1 : (A_0 - I)P_1 - P_1 A_0 = -A_1 P_0 \\ R_k : (A_0 - kI) P_k - P_k A_0 = -A_1 P_{k-1} - A_2 P_{k-2}. \end{cases}$$

III

On considère le système différentiel

$$\textcircled{S} \qquad \begin{bmatrix} xy'_1(x) \\ xy'_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{x^2+1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix}$$

1. Déterminer les solutions du système $\textcircled{\Sigma}$ associé au système $\textcircled{S}$, définies sur la demi-droite $]0, +\infty[$

$$\textcircled{\Sigma} \qquad \begin{bmatrix} xz'_1(x) \\ xz'_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{bmatrix}$$

2. On souhaite déterminer les matrices P_k $(k \geq 1)$ satisfaisant les relations R_k de la partie (II.2.) avec la condition supplémentaire $P_0 = I$.

a. Montrer que pour tout entier $k \geq 0$ on a $P_{2k+1} = 0$

b. On pose $P_{2k} = \begin{bmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{bmatrix}$

Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ on a

$$(A_0 - 2k\ I)P_{2k} - P_{2k}A_0 = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} P_{2k-2}$$

En déduire que $\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = M_k \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ b_{k-1} \end{pmatrix}$

M_k étant une matrice carrée d'ordre 2 dont les coefficients seront exprimés en fonction de k.

On pose $\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$

Calculer x_k et y_k en fonction de k.
